

Chapitre 4 : corrigé

Exercice 4.4

Le tenseur des contraintes en un point M de l'espace (O, x, y, z) est donné par :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \begin{pmatrix} 2xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 5 \text{ N/mm}^2$$

Déterminer la densité de force de contact au point P(2,1,√3) agissant sur le plan tangent en P au cylindre d'équation $y^2 + z^2 = 4$

L'axe du cylindre est l'axe xx' et P appartient bien au cylindre.

P(2,1,√3) est bien sur le cylindre et son projeté sur l'axe x est A(2,0,0)

une normale est donnée par $\overrightarrow{AP}(0,1,\sqrt{3})$ qu'il convient de normaliser

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} = \frac{\sigma_0}{2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 5 \text{ N/mm}^2$$

Une seconde solution :

P(2,1,√3) est sur le cylindre d'équation $f = y^2 + z^2 = 4$

une normale est donnée par $\overrightarrow{\text{grad}f}$ en P : (0,2,2√3) qu'il convient de normaliser

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} = \frac{\sigma_0}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 5 \text{ N/mm}^2$$

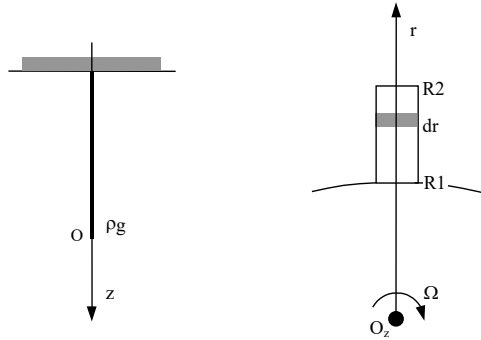
Exprimer la norme de la densité de force de contact en MPa.

$$\mathbf{t} = \frac{\sigma_0}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 5 \text{ MPa} \text{ donc } t = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{25 + 36 + 12} = \frac{5}{2} \sqrt{73} = 21.36 \text{ MPa}$$

Exercice 4.13 Tension sur un câble suspendu et sur une aube de turbine

Calculer la tension :

- (a) le long d'un câble suspendu de section constante, soumis à la gravitation.
- (b) le long d'une aube de turbine de section constante, tournant autour d'un axe O_z à une vitesse angulaire Ω . Pour ce cas, on néglige la gravité et on déterminera la densité de force centrifuge volumique au point distant de r du centre de rotation.



Tension le long d'un câble suspendu de section constante, soumis à la gravitation.

La contrainte s'exerce selon z et ne dépend que de z : $\sigma_{zz} = \sigma(z)$. Les autres composantes des contraintes sont nulles. On note $-H$ la position d'attache du câble.

$\text{div}\sigma + \rho g = 0$ donne selon z: $\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho g = 0$. Ainsi $\sigma = -\rho g z + A$

avec $A = 0$ car $\sigma = 0$ en $z = 0$ (section inférieure du câble)

En $z = -H$, $\sigma = \rho g H = \rho g S H / S = m g / S$ avec S : section du câble

Tension le long d'une aube de turbine de section constante, tournant autour d'un axe O_z à une vitesse angulaire Ω . Pour ce cas, on néglige la gravité et on déterminera la densité de force centrifuge volumique au point distant de r du centre de rotation.

On travaille en coordonnées cylindriques. Le tenseur des contraintes ne dépend que de r en régime permanent i.e. à vitesse angulaire constante. La force volumique n'est plus la gravité mais la force centrifuge. Un petit élément de masse m et de volume Δv subit une force centrifuge valant $mV^2/r = m r \omega^2 = \rho \Delta v r \omega^2$ avec V la vitesse et r la distance au centre. Cette force divisée par le volume Δv correspond à la densité de force volumique f soit $f = \rho \omega^2$ portée par u_r . L'équilibre statique nous donne alors :

$$\overline{\text{div}}\sigma(r) + \vec{f} = \vec{0} \text{ avec } \vec{f} = \rho \omega^2 r \vec{u}_r$$

$$\text{ce qui donne selon } \vec{e}_r: \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \text{ avec } \sigma_r = \sigma_{rr} \text{ et } \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$$

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = -\rho \omega^2 r^2, \text{ on cherche une solution particulière sous la forme } A r^m.$$

$$A m r^m + A r^m = -\rho \omega^2 r^2 \text{ donc } m = 2 \text{ et } 3A = -\rho \omega^2 \text{ soit } \sigma_r = -\frac{\rho \omega^2}{3} r^2$$

$$\text{Solution homogène: } r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = 0, \quad \sigma_r = B/r$$

$$\text{Solution générale: } \sigma_r = -\frac{\rho \omega^2}{3} r^2 + B/r \text{ avec } \sigma_r = 0 \text{ en } r = R_2$$

$$\sigma_r = -\frac{\rho \omega^2}{3} r^2 + \frac{\rho \omega^2}{3} R_2^3 / r = \frac{\rho \omega^2}{3} (R_2^3 / r - r^2)$$

$$\text{NB: en } R_1, \sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{3} (R_2^3 / R_1 - R_1^2)$$

$$\text{NB: si } R_2 = R_1 + \varepsilon, \sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{3 R_1} (R_1^3 + 3\varepsilon R_1^2 - R_1^3) = \frac{\rho R_1^2 \omega^2}{3 R_1} (R_2 - R_1) S$$

$$\sigma_r = m \frac{R_1^2 \omega^2}{3 R_1} = m \frac{R_1 \omega^2}{3} = \text{force centrifuge /section}$$

Exercice 4.14

Sur une "tranche" du barrage, les conditions aux limites sont les suivantes :

sur la face immergée (notée $x=0$), il subit la pression de l'eau

sur la face à l'air libre ($x=y \tan \theta = y$ avec $\theta = 45^\circ$), il subit la pression atmosphérique qui est jugée négligeable.

A l'intérieur du domaine, i.e. dans le béton et à sa surface, équilibre statique:

$$\operatorname{div} \sigma + \rho_b g = 0 \quad \text{avec } \rho_b = \text{densité du béton}$$

Sur la surface immergée, $x = 0$, la normale sortante est $n = -e_x$, et la contrainte subie par la surface est proportionnelle à la profondeur y et orientée dans la direction de $-e_x$ $\sigma(-e_x) = \rho_e g y e_x$

Sur la surface à l'air libre, $y = x$, la normale sortante est $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - e_y)$, et la contrainte subie

par la surface est nulle : $\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(e_x - e_y) = 0$

L'objectif est de déterminer les constantes A,B,C,D,E,F,G.

Pour la première équation :

$$\operatorname{div} \sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad C + F = -\rho_b g$$

Pour la deuxième équation :

$$\sigma(-e_x) = \rho_e g y e_x \quad \text{sur } x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \rho_e g y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{soit } -Ay - B = \rho_e g y, \text{ i.e. } A = -\rho_e g \text{ et } B = 0.$$

$$\text{et } -Cx - D = 0 \quad \text{qui implique } D = 0$$

Pour la troisième équation :

$$\text{sur } y = x, \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(e_x - e_y) = 0, \quad \sigma_{11} - \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{12} - \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{13} - \sigma_{23} = 0$$

$$Ay - Cx - D = 0 \quad \text{et} \quad Cx + D - Ex - Fy - G = 0$$

$$(A - C)x + B - D = 0 \quad \text{et} \quad (C - E - F)x + D - G = 0$$

$$A = C, \quad C = E + F \quad \text{et} \quad G = 0.$$

En récapitulant on obtient les 7 inconnues :

$$A = -\rho_e g, \quad B = 0, \quad C = -\rho_e g, \quad D = 0, \quad E = (\rho_b - 2\rho_e)g, \quad F = (\rho_e - \rho_b)g \quad \text{et} \quad G = 0$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -\rho_e g y & -\rho_e g x & 0 \\ -\rho_e g x & (\rho_b - 2\rho_e) g x + (\rho_e - \rho_b) g y & 0 \\ 0 & 0 & v(\rho_b - 2\rho_e) g x - v\rho_b g y \end{bmatrix}$$

La force d'ancrage ou réaction du sol R est égale à :

$$\text{en } y = H, t = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_e g x \\ (\rho_b - 2\rho_e) g x + (\rho_e - \rho_b) g H \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = L_z \begin{pmatrix} \int_0^H -\rho_e g x dx \\ \int_0^H ((\rho_b - 2\rho_e) g x dx + (\rho_e - \rho_b) g H dx) \\ 0 \end{pmatrix} = L_z \begin{pmatrix} -\rho_e g H^2 / 2 \\ (\rho_b - 2\rho_e) g H^2 / 2 + (\rho_e - \rho_b) g H^2 \\ 0 \end{pmatrix} = g L_z H^2 / 2 \begin{pmatrix} -\rho_e \\ -\rho_b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_e g \\ -m_b g \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec m_b = masse du barrage et $m_e = \rho_e L_z H^2 / 2$ masse équivalente en eau

La masse du barrage en béton appuyé sur le sol (barrage poids) et une réaction du sol égale au poids de la masse équivalente en eau l'empêche de glisser.

NB: force F exercée par l'eau sur le barrage en $x = 0$ et y variant de 0 à H:

$$\text{en } x = 0, F = \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_e g y & 0 & 0 \\ 0 & (\rho_e - \rho_b) g y & 0 \\ 0 & 0 & -v\rho_b g y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e g y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = L_z \begin{pmatrix} \int_0^H \rho_e g y dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_z \begin{pmatrix} \rho_e g H^2 / 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{F} = m_e g \vec{e}_x$$

Il n'y a pas de forces sur la paroi $y = x$.

NB : on vérifie l'équilibre global des forces agissant sur le barrage:

$$\vec{F} + \vec{R} + m_b g \vec{e}_y = ?,$$

$$\text{avec } \vec{R} = -m_e g \vec{e}_x - m_b g \vec{e}_y \text{ et } \vec{F} = m_e g \vec{e}_x$$

en notant m_b = masse du barrage et m_e = masse équivalente en eau

On a bien équilibre des forces agissant sur le barrage: $\vec{F} + \vec{R} + m_b g \vec{e}_y = \vec{0}$.

Ce qui est tout à fait normal puisqu'on est parti de l'équilibre statique du barrage en béton sur tout son volume et donc en particulier sur sa surface.